Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

9. Mai 2023

Zone A Nachmittag | **Zone B** Vormittag | **Zone C** Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

2223 – 7127

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 4]

Ein Botaniker führt ein Experiment zum Wachstum von Pflanzen durch.

Die Höhe der Pflanzen wird an sieben verschiedenen Tagen gemessen.

Die folgende Tabelle zeigt die Dauer d des Experiments in Tagen, und die durchschnittliche Höhe h (in cm) der Pflanzen an jedem dieser Tage.

Dauer in Tagen (d)	2	5	13	24	33	37	42
Durchschnittshöhe (h)	10	16	30	59	76	79	82

Der Wert des Pearsonschen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten r für diese Daten beträgt auf drei signifikante Stellen genau $0{,}991$.

(a) Die Regressionsgerade von h auf d für diese Daten kann in der Form $h = ad + b$ geschrieben werden.

Finden Sie die Werte von a und b. [2]

(b) Schätzen Sie die durchschnittliche Höhe der Pflanzen nach 20 Tagen Dauer des Experiments mit Hilfe Ihrer Regressionsgeraden. [2]

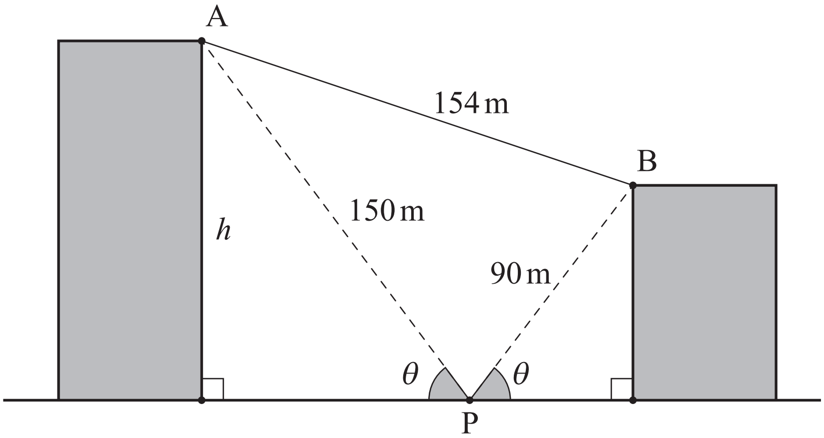
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt zwei ebenerdig stehende Gebäude.

Vom Punkt P auf dem Boden direkt zwischen den beiden Gebäuden beträgt der Höhenwinkel zur Oberkante der beiden Gebäude θ.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Die Entfernung zwischen dem Punkt P und dem Punkt A an der Spitze des höheren Gebäudes beträgt 150 Meter.

Die Entfernung zwischen dem Punkt P und dem Punkt B an der Spitze des niedrigeren Gebäudes beträgt 90 Meter.

Die Entfernung zwischen A und B beträgt 154 Meter.

Finden Sie die Höhe h des höheren Gebäudes.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Maximale Punktzahl: 8]

Das Gewicht W (in Gramm) der in einer Fabrik verpackten Reispackungen, kann durch eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von 204 Gramm und einer Standardabweichung von 5 Gramm modelliert werden.

(a) Eine Packung Reis wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie mehr als 210 Gramm wiegt. [2]

Nach diesem Modell wiegen $80\,\%$ der Reispackungen zwischen w Gramm und 210 Gramm.

(b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Reispackung weniger als w Gramm wiegt. [2]

(c) Finden Sie den Wert von w. [2]

(d) Zehn Reispackungen werden nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine der Packungen weniger als w Gramm wiegt. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

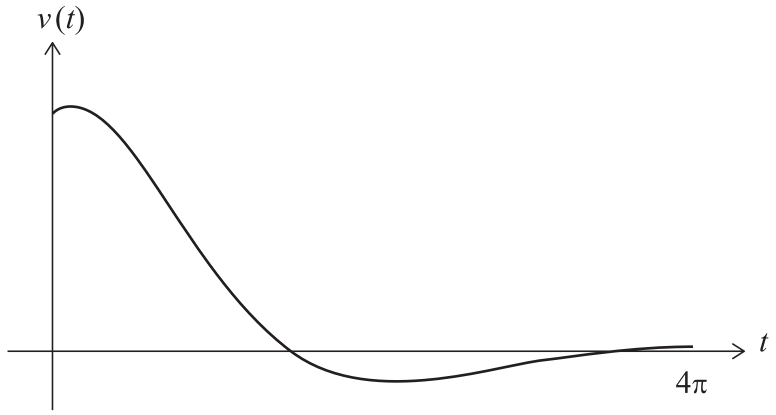
4. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Entwicklung von $(x+h)^8$, mit $h \in \mathbb{Q}^+$, kann als $x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ... + h^8$ geschrieben werden, mit a, b, c, d, ... $\in \mathbb{R}$.

Finden Sie den Wert von h, unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten a, b und d die ersten drei Terme einer geometrischen Folge bilden.

5. [Maximale Punktzahl: 6]

Ein Teilchen bewegt sich so auf einer geraden Linie, dass seine Geschwindigkeit, v (in $\mathrm{m\,s^{-1}}$) zum Zeitpunkt t Sekunden durch $v(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ für $0 \le t \le 4\pi$ beschrieben wird. Das folgende Diagramm zeigt den Graphen von v.



Sei t_1 der erste Zeitpunkt, an dem die **Beschleunigung** des Teilchens Null ist.

(a) Finden Sie den Wert von t_1. [2]

Sei t_2 der **zweite** Zeitpunkt, an dem sich das Teilchen wieder in absoluter Ruhe befindet.

(b) Finden Sie den Wert von t_2. [2]

(c) Finden Sie die Entfernung, die das Teilchen zwischen den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ zurücklegt. [2]

6. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie die beiden folgenden Ebenen:

$$\Pi_1 : 2x - y + 2z = 6$$

$$\Pi_2 : 4x + 3y - z = 2$$

Sei L die Schnittgerade von Π_1 und Π_2.

(a) Validieren Sie, dass $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$, eine Vektorgleichung von L ist. [3]

(b) Finden Sie die Koordinaten des Punktes P auf L, der dem Ursprung am nächsten ist. [5]

7. [Maximale Punktzahl: 5]

Eine Funktion f ist definiert als $f(x) = \arctan(x-2)$, mit $2 \leq x \leq 2+\sqrt{3}$.

Die Fläche, die durch die Kurve, die y-Achse, die x-Achse und die Gerade $y = \frac{\pi}{3}$ begrenzt wird, wird um 360° um die y-Achse gedreht und bildet somit einen Rotationskörper.

Finden Sie das Volumen dieses Körpers.

8. [Maximale Punktzahl: 7]

Eine Funktion g ist definiert durch $g(x)=\frac{2x-5}{x^2-3}$, mit $x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm\sqrt{3}$.

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich von g. [4]

Eine Funktion h ist definiert durch $h(x)=g(|x|)\cos t$, mit $x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm\sqrt{3}$. t ist eine Konstante mit $\frac{\pi}{2} < t \leq \pi$.

(b) Finden Sie die Menge der Werte von x für die gilt, dass $h(x) \leq 0$. [3]

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

9. [Maximale Punktzahl: 5]

S sei die Menge der 30 ersten positiven ganzen Zahlen $\{1, 2, 3, ..., 28, 29, 30\}$.

Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Auswahlen, die Raghu treffen kann, um eine Summe zu erhalten, die durch 3 teilbar ist.

Sie können davon ausgehen, dass die Reihenfolge nicht wichtig ist, so werden zum Beispiel $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 3, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$ alle als die gleiche Auswahl betrachtet. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

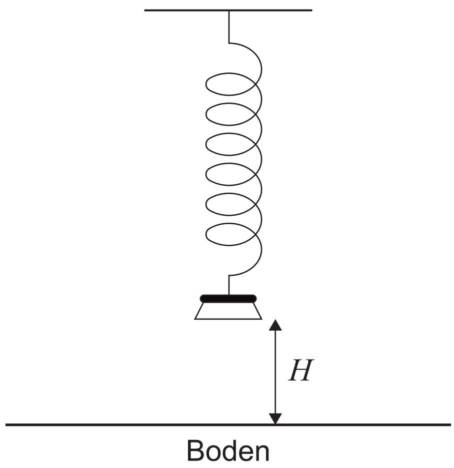
Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 13]

Ein an einer Feder hängendes Gewicht wird nach unten gezogen und losgelassen, so dass es sich vertikal auf und ab bewegt.

Die Höhe H der Unterseite des Gewichts über dem Boden (in Meter) kann durch die Funktion $H(t) = a\cos(7{,}8t) + b$, mit a, $b \in \mathbb{R}$ und $0 \le t \le 10$ modelliert werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden nach dem Loslassen des Gewichts.



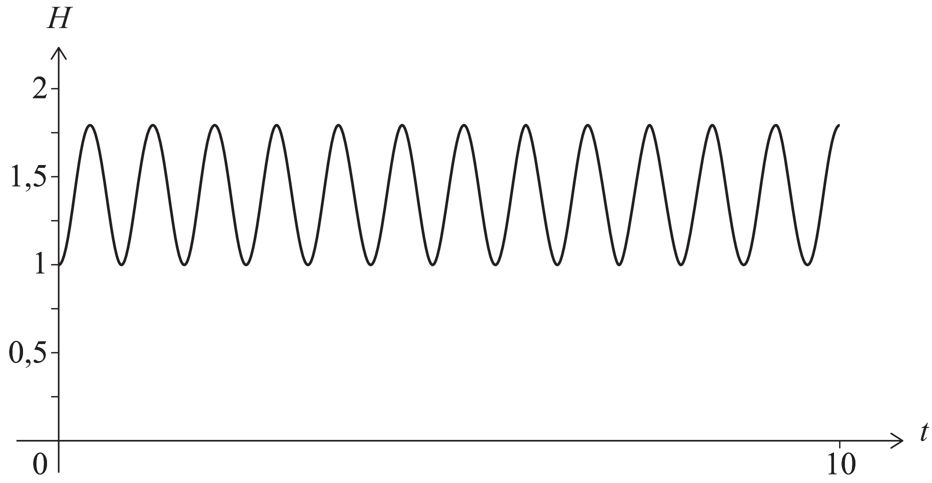
(a) Finden Sie die Periodendauer der Funktion. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 10)

Das Gewicht wird losgelassen, wenn die Höhe seiner Unterseite über dem Boden ihren kleinsten Wert von 1 Meter hat. Es erreicht eine maximale Höhe von $1{,}8$ Meter über dem Boden. Der Graph von H ist im folgenden Diagramm dargestellt.



(b) Finden Sie die Werte von

(i) a;

(ii) b. [3]

(c) Finden Sie die Anzahl, wie oft das Gewicht in den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung seine maximale Höhe erreicht. [2]

(d) Finden Sie den ersten Zeitpunkt, an dem die Unterseite des Gewichts eine Höhe von $1{,}5$ Metern erreicht. [2]

Eine Kamera ist so eingestellt, dass sie das Gewicht zu einem zufälligen Zeitpunkt während der ersten fünf Sekunden seiner Bewegung fotografiert.

(e) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Höhe der Unterseite des Gewichts zum Zeitpunkt des Fotos größer ist als $1{,}5$ Meter. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 20]

Bei einem Glücksspiel werden **zwei** Kugeln nach dem Zufallsprinzip und ohne Zurücklegen aus einer Schachtel gezogen. Die Schachtel enthält anfangs r rote Kugeln und y gelbe Kugeln.

$\mathrm{P}(YY)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass ohne Zurücklegen zwei gelbe Kugeln aus der Schachtel gezogen werden.

Betrachten Sie eine Version dieses Spiels, bei der bekannt ist, dass $\mathrm{P}(YY) = \frac{1}{3}$.

(a) Zeigen Sie, dass $2y^2 - 2(r+1)y + r - r^2 = 0$. [4]

(b) Zeigen Sie durch Lösen der Gleichung in Teil (a), dass $y = \frac{(r+1) + \sqrt{3r^2+1}}{2}$. [4]

(c) Finden Sie zwei Wertepaare für r und y, welche die Bedingung $\mathrm{P}(YY) = \frac{1}{3}$ erfüllen. [4]

Betrachten Sie nun ein ähnliches Glücksspiel, bei dem **drei** Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Schachtel gezogen werden. Die Schachtel enthält anfangs 10 rote Kugeln und y gelbe Kugeln.

$\mathrm{P}(YYY)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass ohne Zurücklegen drei gelbe Kugeln aus der Schachtel gezogen werden.

(d) Finden Sie einen Ausdruck für $\mathrm{P}(YYY)$ in Abhängigkeit von y. [3]

Eine gelbe Kugel wird hinzugefügt, so dass die Schachtel nun 10 rote Kugeln und $(y+1)$ gelbe Kugeln enthält. Die Wahrscheinlichkeit, ohne Zurücklegen drei gelbe Kugeln aus der Schachtel zu ziehen, ist nun doppelt so hoch wie die Wahrscheinlichkeit in Teil (d).

(e) Finden Sie die ursprüngliche Anzahl an gelben Kugeln in der Schachtel. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 21]

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$ mit $x > 0$, $y > 0$.

Es gilt $y = 2$ für $x = 1$.

(a) Finden Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit der Schrittlänge $0{,}1$ einen Näherungswert für y für $x = 1{,}1$. [2]

(b) Zeigen Sie durch Lösen der Differentialgleichung, dass $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$. [8]

(c) Finden Sie den Wert von y für $x = 1{,}1$. [1]

(d) Betrachten Sie die Krümmung des Graphen von $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ für $1 \le x \le 1{,}1$ und erklären Sie damit, warum der Wert von y in Teil (c) größer ist als der in Teil (a) gefundene Näherungswert von y. [2]

Der Graph von $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ hat für $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$ einen Wendepunkt P.

(e) Skizzieren Sie den Graphen einer geeigneten Ableitung von y, und bestimmen Sie damit die x-Koordinate von P. [2]

Es kann gezeigt werden, dass $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-x^4 + x^2y^2 + 6y^4}{x^2y^3}$ für $x > 0$, $y > 0$.

(f) Zeigen Sie mit Hilfe dieses Ausdrucks für $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, dass der Punkt P auf der Geraden $y = mx$ liegt, und bestimmen Sie den genauen Wert von m. [6]

Quellenangaben:

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.